

(MAT3S)

(2110-3)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2017.

Second Year — Third Semester

Part II — Mathematics

Paper III — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

(Short Answer Questions)

Answer any FIVE of the following questions.

1. Prove that the set G of rational numbers other than 1 with operation $\oplus$ such that $a \oplus b = a + b - ab$ for $a, b \in G$ is an abelian group.

1 కాకుండా మిగిలిన అకరణీయ సంఖ్యలతో ఏర్పడిన సమితి G పై $\oplus$ పరిక్రియ $a \oplus b = a + b - ab$ $\forall a, b \in G$ నిర్వచించబడిన $(G, \oplus)$ ఎబిలియన్ సమూహం అని చూపండి.

2. Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of $G \Leftrightarrow$

(a) $a, b \in H$ implies $ab \in H$

(b) $a \in H$ implies $a^{-1} \in H$.

ఒక చూస్తేతర ఉపసమితి H , సమూహము G కి ఉప సమూహము G కావాలంటే $\Leftrightarrow$

(a) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

(b) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ అని చూపండి.

3. Let G be a group. For any $a, b \in G$ show that $O(a) = O(b^{-1}ab)$.

G ఒక సమూహము, a, b లు G లోని ఏదేని మూలకాలయిన $O(a) = O(b^{-1}ab)$ అని చూపండి.

4. Prove that a subgroup H of a group G is normal iff $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$.

G లో H అభిలంబ ఉపసమూహం కావటానికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమం $\forall x \in G$ కి $xHx^{-1} = H$ అని చూపండి.

5. Prove that a subgroup H of a group G is a normal $\Leftrightarrow$ every left coset of H in G is right coset of H in G .

సమూహము G యొక్క ఉపసమూహము H అభిలంబము కావాలంటే $\Leftrightarrow G$ లోని H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి G లోని H యొక్క కుడి సహసమితి కావాలని చూపండి.

6. Define homomorphism. Prove that a homomorphism ϕ of G into G' with Kernel K is one-to-one if $K = \{e\}$.

సమరూపతను నిర్వచించండి. కెర్నల్ K తో ఒక సమరూపత $\phi: G \rightarrow G', 1-1$ కావడానికి $K = \{e\}$ కావలెనని చూపండి.

7. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $\{1, -1, i, -i\}$.

$\{1, -1, i, -i\}$ అనే గుణకార సమూహముతో తుల్యరూపత కలిగిన క్రమ ప్రస్తార సమూహమును కనుక్కోండి.

8. Prove that every subgroup of cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయమవుతుందని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

(Essay Answer Questions)

Answer ALL of the following questions.

9. (a) Prove that a semigroup $(G, \circ)$ in which $x \circ a = b, a \circ y = b$ have a solution in G for $a, b \in G$, is a group.

$a, b \in G$ కు $x \circ a = b, a \circ y = b$ అకు (G) లో సాధన వుండే అర్థ సమూహము $(G, \circ)$, ఒక సమూహమవుతుందని చూపండి.

Or

- (b) Prove that the set of matrices $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$ form a group w.r.to matrix multiplication.

$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$ అగునట్లు మాత్రికల సమితి మాత్రికల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని చూపండి.

10. (a) If H and K are two subgroups of a group G then show that HK is also a subgroup iff $HK = KH$.

సమూహము G లో H మరియు K లు రెండు ఉపసమూహాలు అయితే HK ఉపసమూహము కావడానికి $HK = KH$ అనునది అవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అనిచూపండి.

Or

- (b) State and prove Lagrange theorem for finite groups.

పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

11. (a) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G then show that H is a normal subgroup of G .

G సమూహంలో సూచిక రెండు కలిగిన G ఉపసమూహం H అయిన H అనునది G యొక్క అభిలంబ సమూహం అని చూపండి.

Or

- (b) Let H be a normal subgroup of a group $(G, \cdot)$ then prove that the quotient set $\frac{G}{H}$ is a group with respect to co-set multiplication.

$(G, \cdot)$ కు H ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము. G లోని H యొక్క సహ సమితుల సమితి $\frac{G}{H}$ సహసమితుల గుణకారం దృష్ట్యా ఒక సమూహం అని చూపండి.

12. (a) State and prove Cayley's theorem.

కేలె సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

- (b) Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $\{1, w, w^2\}$.

$\{1, w, w^2\}$ అనే గుణకార సమూహముతో తుల్య రూపత కలిగిన క్రమ ప్రస్తార సమూహమును కనుక్కోండి.

13. (a) Show that the permutations given below are odd or even

క్రింది ప్రస్తారాలు సరియో లేదా బేసియో పరీక్షించండి.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

(iv) $(1 \ 6 \ 5 \ 2)$

(v) $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)(1 \ 2 \ 3)(4 \ 5)$.

Or

- (b) Show that a finite group of prime order is cyclic.

ప్రధాన సంఖ్య తరగతిగా గల పరిమిత సమూహము చక్రీయము అని చూపండి.